INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE
ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ÉLÈVES TITULAIRES STATISTICIENS ÉCONOMISTES
A L'ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ADMINISTRATION ÉCONOMIQUE

Mai 1984. — Option MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

PRÉLIMINAIRES — NOTATIONS

Toutes les fonctions intervenant dans le problème sont à valeurs réelles.

Si f est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on lui associe l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}f) \qquad y'' + f(t)\, y = 0$$

On appelle solution de $(\mathcal{E}f)$ toute fonction u deux fois dérivable sur I telle que :

$$\forall\, t \in I \qquad u''(t) + f(t)\, u(t) = 0$$

On rappelle que pour tout élément a de I et couple de réels (b, c), il existe une unique solution de $(\mathcal{E}f)$, u, telle que : $u(a) = b$ et $u'(a) = c$.

On dit que u est une solution non nulle de $(\mathcal{E}f)$ si u est une solution de $(\mathcal{E}f)$ ne s'annulant pas en au moins un point de I.

Soit u une solution de $(\mathcal{E}f)$:

— on dit que a est un zéro de u si $a \in I$ et $u(a) = 0$;

— on dit que (a, b) est un couple de zéros consécutifs de u si :
a et b sont deux zéros de u, $a < b$, et $\forall\, t \in]a, b[\qquad u(t) \neq 0$;

— on dit qu'une suite (t_N), indexée par $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, est une suite de zéros consécutifs de u si pour tout entier N, (t_N, t_{N+1}) est un couple de zéros consécutifs de u.

PARTIE I

1° Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et u une solution non nulle de $(\mathcal{E}f)$ sur I.

a. Montrer que les zéros de u dans I sont isolés. Que peut-on en déduire si I est un intervalle fermé borné?

b. Montrer que si a est un zéro de u, élément de l'intérieur de I, u change de signe en a. Préciser le signe de $u'(a)$ suivant les cas.

2° Soit A et B deux fonctions continues sur un intervalle $[a, +\infty[$ de $\mathbb{R}$.

a. Exprimer sous forme intégrale la solution de l'équation différentielle :

$$y' = A(t)\, y + B(t)$$

valant 0 en a.

b. En s'inspirant de la méthode utilisée au *a*, montrer que si φ est une fonction continûment dérivable sur $[a, +\infty[$ telle que :

$$\varphi(a) = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, t \in [a, +\infty[\qquad \varphi'(t) \leqslant A(t)\, \varphi(t) + B(t),$$

on a alors pour tout $t \geqslant a$:

$$\varphi(t) \leqslant \int_a^t B(s) \exp\left(\int_s^t A(x)\, dx\right) ds$$

c. En déduire que si u, v, w sont trois fonctions continues et positives sur un intervalle $[a, +\infty[$ telles que :

$$u(t) \leqslant v(t) + \int_a^t w(s)\, u(s)\, ds \qquad \text{pour tout} \qquad t \geqslant a,$$

on a l'inégalité :

$$u(t) \leqslant v(t) + \int_a^t v(s)\, w(s) \exp\left(\int_s^t w(x)\, dx\right) ds \qquad \text{pour} \qquad t \geqslant a.$$

3° Soit l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$(F) \qquad y'' + \left(1 - \frac{2}{t^2}\right) y = 0$$

a. Montrer qu'il existe une fonction u, développable en série entière en 0 de rayon de convergence non nul, qui est une solution non nulle de (F) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donner des relations de récurrence sur les coefficients de cette série et préciser le rayon de convergence.

Donner une expression simple de u, à l'aide de fonctions classiques.

$\left[\text{On pourra calculer } \frac{1}{(2k)!} - \frac{1}{(2k+1)!}.\right]$

b. Montrer de même qu'il existe une fonction w, impaire, développable en série entière en 0 de rayon de convergence non nul, telle que la fonction v définie par :

$$v(t) = w(t) + \frac{1}{t}, \qquad \text{pour} \quad t > 0$$

soit une solution de (F) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Préciser les résultats en donnant le rayon de convergence de cette série et une expression simple de v à l'aide de fonctions classiques.

c. Quelles sont les solutions de (F) sur $\mathbb{R}_+^*$?

Sont-elles bornées au voisinage de l'infini? au voisinage de 0?

Quelles sont toutes les fonctions φ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, telles que : $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ et solution de (F) sur $\mathbb{R}_+^*$.

d. Montrer qu'une telle fonction φ admet dans chaque intervalle $\left]N\pi, N\pi + \frac{\pi}{2}\right[$, $N \in \mathbb{N}$, un unique zéro x_N, défini par la relation

$$x_N = \text{Arctg } x_N + N\pi$$

Donner un développement limité à l'ordre 2 suivant les puissances de $\frac{1}{N}$, de $x_N - N\pi$.

Partie II

Dans cette partie f est une fonction continue sur un intervalle I telle que :

$$\forall t \in I \qquad f(t) < 0.$$

u désigne une solution de $(\mathcal{E}f)$ sur I.

1° Montrer que s'il existe a et b, deux éléments distincts de I tels que : $u(a) = u(b) = 0$, u est la solution nulle sur I.

2° On suppose que I est non majoré et $a \in I$.

Montrer que si $u(a) = 0$ et $\lim_{t \to +\infty} u(t) = 0$, u est la solution nulle sur I.

3° On suppose que $I = \mathbb{R}$.

a. Montrer que si : $\forall t \in \mathbb{R} \qquad u(t) > 0$, u est non majorée sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que si : $\exists a \in \mathbb{R}$, $u(a) = 0$ et $\forall t \in]a, +\infty[$ $u(t) > 0$, u est non majorée sur $\mathbb{R}$.

c. Démontrer que la *seule* solution de $(\mathcal{E}f)$, bornée sur $\mathbb{R}$, est la solution nulle.

d. La conclusion de *c* est-elle encore vraie si I est un intervalle $[a, +\infty[$?

Partie III

1° On suppose que f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall t \in I \qquad f(t) \geqslant g(t)$$

u est une solution de $(\mathcal{E}g)$ admettant un couple de zéros consécutifs (a, b) dans I.

v est une solution de $(\mathcal{E}f)$ ne s'annulant pas simultanément en a et b.

a. Montrer que si :

$$\forall t \in]a, b[\qquad u(t) > 0$$
$$v(a) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad v(b) \geqslant 0$$

alors :

$$u'(b)\, v(b) - u'(a)\, v(a) < 0$$

b. Montrer que si : $\forall\, t \in]a, b[\quad u(t) > 0$ et $v(t) > 0$, la fonction $(u'v - uv')$ est croissante sur $[a, b]$

c. En déduire que v admet un zéro dans $]a, b[$.

2° Retrouver le résultat de II.1° à l'aide du résultat de III.1° *c*.

3° On revient au cas général d'une fonction f quelconque continue sur un intervalle I.

Montrer que si u est une solution de $(\mathcal{E}f)$ admettant un couple de zéros consécutifs, toute autre solution de $(\mathcal{E}f)$ non proportionnelle admet un zéro dans $]a, b[$.

4° On suppose qu'il existe deux réels λ et μ tels que :

$$0 < \lambda^2 \leqslant f(t) \leqslant \mu^2 \quad \text{pour tout} \quad t \in I$$

Soit u une solution non nulle de $(\mathcal{E}f)$ sur I

a. Démontrer que tout intervalle fermé de longueur $\dfrac{\pi}{\lambda}$ inclus dans I contient un zéro de u.

b. Démontrer que si a est un zéro de u, u n'admet aucun zéro dans l'intervalle $\left]a - \dfrac{\pi}{\mu},\ a + \dfrac{\pi}{\mu}\right[$.

5° Pour α réel, soit l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$(E_\alpha) \quad y'' + \left(1 + \frac{\alpha}{t^2}\right) y = 0$$

Dans cette question on suppose de plus $\alpha > 0$. Soit u une solution non nulle de (E_α).

a. Pour tout réel $a > 0$, montrer l'existence d'un plus petit zéro γ de u dans l'intervalle $[a, +\infty[$.

b. Montrer l'existence d'une suite (t_N), $N \in \mathbb{N}$, de réels strictement positifs telle que :

i. $\forall\, N \in \mathbb{N}$, (t_N, t_{N+1}) est un couple de zéros consécutifs de u;

ii. $\forall\, N \in \mathbb{N}$, $0 < t_{N+1} - t_N \leqslant \pi$;

iii. $\lim\limits_{N \to +\infty} t_N = +\infty$;

iv. $\lim\limits_{N \to +\infty} t_{N+1} - t_N = \pi$.

c. Montrer l'existence d'un réel $\eta > 0$ tel que pour tout réel $b \in]0, \eta[$, l'intervalle $]0, b[$ contient un zéro de u.

d. Montrer l'existence d'une suite (σ_N), $N \in \mathbb{Z}$, de réels strictement positifs telle que :

i. $\forall\, N \in \mathbb{Z}$ (σ_N, σ_{N+1}) est un couple de zéros consécutifs de u;

ii. $\lim\limits_{N \to -\infty} \sigma_N = 0$;

iii. $\lim\limits_{N \to +\infty} \sigma_N = +\infty$.

6° On reprend la question précédente dans le cas où $\alpha \leqslant 0$.

a. Montrer l'existence d'un plus petit zéro γ de u dans $\mathbb{R}_+^*$.

b. Étudier les zéros de u en précisant ce que deviennent dans ce cas les résultats de III.5° *b*.

Partie IV

1° On considère l'équation différentielle :

$$(H) \quad y'' + (\lambda^2 + g(t))\, y = 0$$

dans laquelle λ est un réel strictement positif et g une fonction continûment dérivable sur un intervalle $[a, +\infty[$ de $\mathbb{R}$.

On suppose de plus que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} |\, g'(t)\,|\, dt$ est convergente.

a. Montrer que g a une limite quand t tend vers $+\infty$.

On suppose désormais que $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = 0$.

b. Soit u une solution de (H) sur $[a, +\infty[$.

Démontrer que $\forall\, t \in [a, +\infty[\quad \forall\, s \in [a, +\infty[$:

$$u'^2(t) - u'^2(s) + (\lambda^2 + g(t))\, u^2(t) - (\lambda^2 + g(s))\, u^2(s) = \int_s^t g'(x)\, u^2(x)\, dx$$

c. En déduire que toutes les solutions de (H) sont bornées au voisinage de $+\infty$.

.../...

2° Dans toute la suite du problème, u désigne une solution non nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle (E_α), $\alpha \in \mathbb{R}$, définie au III.5°. (t_N), $N \in \mathbb{N}$, désigne une suite de zéros consécutifs de u ayant pour limite l'infini, lorsque N tend vers $+\infty$.

On pose

$$L_N = \text{Sup } \{ | u(t) | , \ t \in [t_N , t_{N+1}] \}$$
$$M_N = \text{Sup } \{ | u'(t) | , \ t \in [t_N , t_{N+1}] \}$$

a. Vérifier que u est bornée au voisinage de l'infini.

b. Étudier la convergence de la suite (M_N), $N \in \mathbb{N}$.

c. Démontrer que la suite (L_N), $N \in \mathbb{N}$, est convergente et que :

$$\lim_{N \to +\infty} M_N = \lim_{N \to +\infty} L_N .$$

3° *a.* Effectuer le changement de variable défini par $t = e^{-s}$ dans l'équation $(E\alpha)$. On obtiendra une équation du type : $v'' + p(s)\, v' + q(s) = 0$.

b. Trouver une fonction z telle que la fonction w définie par : $v = wz$, soit solution d'une équation différentielle du type :

$$w'' + r(s)\, w = 0$$

c. En déduire que pour $\alpha > \frac{1}{4}$, les solutions u de (E_α) admettent un prolongement continu en 0.

Un tel prolongement est-il de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$?

4° On suppose $\alpha = -p(p-1)$, $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$.

Montrer qu'il existe deux solutions u et v de (E_α) telles que au voisinage de 0, $u \sim t^p$ et $v \sim \frac{1}{t^{p-1}}$.